Le raisonnement par contraposition.

Pour comprendre le raisonnement par contraposition, il est utile de préciser ce que l'on entend par “Si A alors B”(A représentant les hypothèses de l'énoncé et B ses conclusions).

Pour cela, on va définir ou, et, non par des tables de vérité. A est vrai si A est évalué à 1 et A est faux si A est évalué à 0.

La table de vérité de ou est la suivante :

A	B	A ou B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Cette table correspond bien à l'utilisation habituelle du ou : “A ou B”est vrai si et seulement si au moins l'un des deux est vrai.

La table de vérité de et est la suivante :

A	B	A et B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Cette table correspond bien à l'utilisation habituelle du et : “A et B”est vrai si et seulement si les deux sont vrais.

La table de vérité de non est la suivante :

A	non A
0	1
1	0

Cette table correspond bien à l'utilisation habituelle du non : non A est vrai si et seulement si A est faux. On remarque que non(non A) est équivalent à A (ils ont la même table de vérité, en d'autres termes A est vrai si et seulement si non(non A) est vrai).

On définit "Si A alors B"(ou "A implique B", noté A $\Rightarrow$ B) par la table de vérité suivante :

A	B	A $\Rightarrow$ B
0	0	1
0	1	1
1	1	1
1	0	0

Cette table correspond bien à l'utilisation habituelle de "Si A alors B": lorsque A est faux, B peut être vrai ou faux, lorsque A est vrai, B est vrai.

Considérons à présent la table de vérité de "(non A) ou B".

A	B	(non A) ou B
0	0	1
0	1	1
1	1	1
1	0	0

C'est la même table de vérité que celle de "A implique B". En d'autres termes, "A implique B"est équivalent à "(non A) ou B".

De la même manière, "(non B) implique (non A)"est équivalent à "(non(non B)) ou (non A)"donc à "B ou (non A)".

Or "B ou (non A)"est équivalent à "(non A) ou B"qui est équivalent à "A implique B"donc "(non B) implique (non A)"est équivalent à "A implique B".

Plutôt que de démontrer "Si A alors B", on peut donc démontrer "Si (non B) alors (non A)". C'est le raisonnement par contraposition.

Le raisonnement par l'absurde.

Pour les énoncés de la forme "B"(avec B les conclusions), on peut également mener un raisonnement par contraposition, en réécrivant l'énoncé sous la forme "Si A alors B", avec le même B et avec A la proposition toujours vraie (dont la table de vérité n'a que des 1 dans la dernière colonne), et en démontrant "Si (non B) alors (non A)", avec (non A) la proposition toujours fausse (dont la table de vérité n'a que des 0 dans la dernière colonne).

"$2 = 2$"est un exemple de proposition toujours vraie et sa négation "$2 \neq 2$"est un exemple de proposition toujours fausse. Comme on aboutit à quelque chose d'absurde (la proposition toujours fausse) on préfère souvent appeler cette forme du raisonnement par contraposition le raisonnement par l'absurde.

Énoncé : Il y a une infinité de nombres premiers.

Supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers, notons-les $p_1, ..., p_n$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notons $p = p_1 \times ... \times p_n + 1$. Le produit des p_i est supérieur à 1 donc p est supérieur à 2. p admet donc une décomposition en facteurs premiers (voir article 2. Récurrence). Il existe donc $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $p = p_i \times q$ avec q un entier. Notons m le produit des p_j différents de p_i. On a donc :

$$1 = p - p_i \times m = p_i \times (q - m)$$

Or $p_i \geq 2$ (car p_i est premier) et $q - m$ est un entier (car q et m sont des entiers) strictement positif (car c'est $\frac{1}{p_i}$) donc $(q - m) \geq 1$ donc $1 \geq 2$: ceci est absurde (c'est la proposition toujours fausse).
On en déduit qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Une autre forme de raisonnement par l'absurde est la suivante : pour montrer "Si A alors B", on peut montrer "Si A et non B alors C"avec C la proposition toujours fausse. En effet, (A et non B) $\Rightarrow$ C est équivalent à (non C) $\Rightarrow$ (non(A et non B)) et (non(A et non B)) est équivalent à (non A ou B) (comparez les deux tables de vérité), c'est-à-dire à A $\Rightarrow$ B.

Clémentine Lemarié–Rieusset